

基于材料变密度法的 MRI 匀场线圈设计

曲洪一^{1,2}, 王秋良^{1,2}, 王耀辉^{1,2}, 秦 朗^{1,2}

(1. 中国科学院电工研究所, 北京 100190;
2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要:核磁共振成像系统磁场的均匀度对成像的质量起着决定性作用,采用匀场线圈抵消磁场球谐波分量是提高磁场均匀度的有效手段。采用材料变密度法设计了一阶轴向匀场线圈,首先将设计区域划分为足量的网格,网格的材料密度作为设计变量,利用有限元法组装电导矩阵,求解设计区域的电流分布,建立了材料密度分布与磁场的关系。其次,将磁场均匀度作为优化目标,采用优化准则法对密度变量进行优化,得到了满足约束条件的最优解。最后,利用流函数方法将材料分布离散为导线,得到了线圈的拓扑结构。相比于室温有源匀场线圈设计常用的解析法,变密度法能够有效地利用材料,充分发挥材料特性,可设计出更高性能匀场线圈。

关键词: MRI; 匀场线圈; 变密度法; 有限元; 优化准则法; 流函数

DOI: 10. 12067/ATEEE1810046 **文章编号:** 1003-3076(2019)05-0084-06 **中图分类号:** TM153

1 引言

自 20 世纪 50 年代核磁共振(Nuclear Magnetic Resonance, NMR)现象发现以后,其在化学工业、石油工业、食品业、医药工业、矿业等领域都发挥着重要作用。尤其在医学成像领域,磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI)技术因其具有诸多其他医学影像方法不可比拟的优势,成为当今最重要的影像手段之一^[1,2]。在 MRI 系统中,主磁体需要在中心目标成像区域内产生一个具有高度均匀的磁场,其直接关系到 MRI 系统的信噪比、谱线表观宽度和谱线分辨能力,在很大程度上决定着图像的质量。因此,磁场的均匀度是衡量 MRI 系统性能的重要指标之一。尽管主磁体的电磁设计可以达到很高的精度,但在磁体加工、运输和组装过程中总会存在误差,同时线圈在低温容器中热胀冷缩、励磁后受到的洛伦兹力等都会使线圈偏离设计位置,从而使得实际产生的磁场难以达到预期^[3]。通常,需要采用一套相互独立可调的高精度匀场线圈作为补救手段。目前,国内外已有诸多用于匀场线圈的电磁设计方法,如解析法、目标场法、边界元法等,而基于材

料分布的变密度法设计的研究较少,尤其在国内外,几为空白。材料变密度法的基本思想是寻求在给定的设计区域内材料最优分布,可以极大地改善匀场线圈的性能或者减小线圈的体积,同时也可以给工程设计人员提供一个更加新颖的设计方案^[4]。本文基于材料变密度法对一阶轴向匀场线圈的设计进行了探究,重点介绍了材料分布模型及优化模型的构建,探索变密度法在线圈设计方向的前景。

2 材料分布与磁场的关系

2.1 变密度法

材料分布的变密度法^[5]本质上是一种 0-1 离散变量的组合优化问题,设计区域划分为许多子区域,每个子区域有材料分布则表示为 1,无材料分布则表示为 0。优化计算中,有多少子区域就有多少设计变量,计算量巨大,耗时长,求解困难。为了克服离散变量的难题,常将离散变量的优化问题松弛为连续体优化问题,即允许出现 0 和 1 之间的中间密度变量。但是,中间密度变量会产生大量的灰度单元,这使得所设计的结构在工程制造中难以实现,因此引入变密度法对中间密度变量进行惩罚,它以每

收稿日期: 2018-10-24
基金项目: 国家自然科学基金项目(51777205;11745005;51477167)
作者简介: 曲洪一(1993-),男,山东籍,博士研究生,研究方向为电工理论新技术;
王秋良(1965-),男,湖北籍,研究员,博导,博士,研究方向为电工理论新技术。

个单元的相对密度作为设计变量,设定相对密度和材料性质之间的某种关系,程序实现简单,计算效率高^[6]。变密度法中常见的插值模型有:固体各向同性惩罚微结构模型(Solid Isotropic Material with Penalization, SIMP)^[7]、材料属性的合理近似模型(Rational Approximation of Material Properties, RAMP)^[8]。SIMP 或 RAMP 通过引入惩罚因子使中间密度变量向 0-1 两端汇集,但其缺陷也很明显,如 SIMP 棋盘格现象以及 RAMP 的密度两极分化不平衡等,对设计结果不利,因此本文采用了一种改进的插值方式,得到了较为理想的密度惩罚函数,惩罚效果明显,使得函数连续可导,既能够运用成熟的导数优化算法求解,又可以逐步弱化相对密度小的单元,强化相对密度大的单元,使结构单元趋于“两极分化”^[9]。

2.2 设计区域展开

使用变密度法设计匀场线圈,首先要建立 MRI 匀场线圈设计区域材料分布与 DSV (Diameter of Spherical Volume) 区域磁场之间的关系。图 1(a) 为匀场线圈设计柱面,其半径为 R ,高度为 H ,深色部分为 DSV 区域,半径为 R_{DSV} 。将设计区域柱面展开成平面,如图 1(b) 所示,其中 $L = 2\pi R$,并且标有两套坐标系,一套为设计区域坐标系(h, l),一套为 DSV 区域坐标系(x, y, z),方便构建优化模型。

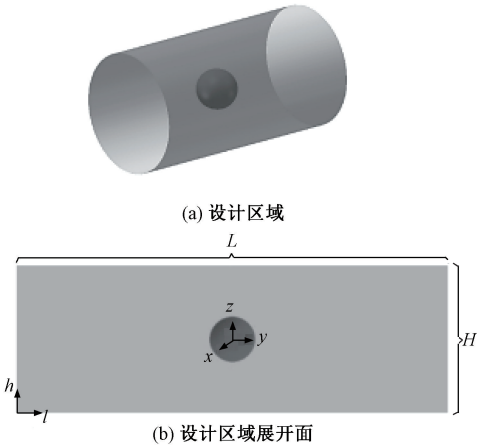


图 1 匀场线圈设计区域及展开面

Fig. 1 Design area of shim coil and its expansion surface

2.3 磁场计算

将设计区域剖分为 N 个网格,材料(铜)密度变量为 $\rho(x)$, x 表示密度分布的集合,其元素的数量等于划分的网格数 N , Ω 表示设计区域^[10],如图 2 所示。

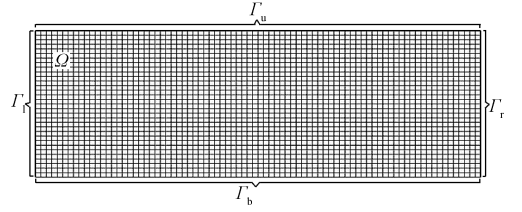


图 2 设计区域划分网格以及边界条件

Fig. 2 Design area dividing meshes and boundary conditions

引入惩罚函数 $E = 1/[1 + e^{-(\rho(x)-0.5)/P}]$, 可得到设计区域总的电导率 $\sigma(\rho)$ 为:

$$\sigma(\rho) = \sigma_{\text{air}} + (\sigma_{\text{copper}} - \sigma_{\text{air}})E \quad (1)$$

式中, P 为惩罚因子,一般取值为 $0.03 \sim 0.09$; σ_{air} 为空气的电导率,其数值为 $5 \times 10^{-15} \text{ S/m}$; σ_{copper} 为铜的电导率,其数值为 $5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。由于设计区域无电流源,根据式(2)的电流连续性方程以及式(3)的电流密度计算公式,可推出材料分布区域电势 V 的拉普拉斯方程满足式(4)。

$$\nabla J = 0 \quad (2)$$

$$J = \sigma \nabla V \quad (3)$$

$$\nabla^2 V = 0 \text{ on } \Omega \quad (4)$$

边界条件为:

$$V = U \text{ on } \Gamma_l \quad (5)$$

$$V = 0 \text{ on } \Gamma_r \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_u, \Gamma_b \quad (7)$$

设计区域两端有电势差,则产生电流,根据式(3)计算出表面电流密度 x, y 方向的分量分别为:

$$J_x = \sigma(\rho) \frac{\partial V}{\partial l} \sin \frac{l}{R} \quad (8)$$

$$J_y = -\sigma(\rho) \frac{\partial V}{\partial l} \cos \frac{l}{R} \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可以看出,不同材料的电导率决定表面电流的不同,根据毕奥萨伐定律,柱面上的电流密度在 DSV 区域表面的点 (x_i, y_i, z_i) 产生的磁场为^[11]:

$$B'_z(x_i, y_i, z_i) = -\frac{\mu_0 t}{4\pi} \int \frac{J_y(R \cos \frac{l}{R} - x_i) - J_x(R \sin \frac{l}{R} - y_i)}{[(R \cos \frac{l}{R} - x_i)^2 + (R \sin \frac{l}{R} - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} d\Omega \quad (10)$$

式中, t 为材料的厚度,设计过程中定为单根导线的直径。

式(10)是在单位电压($U = 1\text{V}$)下得到的磁场,实际磁场 B_z 要根据输入电压 U 的大小计算,因此 $B_z(x_i, y_i, z_i) = UB'_z(x_i, y_i, z_i)$ 。

3 有限元推导

通过第2节的分析,建立了磁感应强度、电流密度和设计变量之间的关系,优化模型的求解需推导出磁场公式的有限元形式。设计区域柱面划分为 M 个四节点矩形单元,如图2所示,在设计区域柱面上,电势 V 在每一个矩形小单元 e 上的值可以用节点形函数 N_i 的形式表达,则整个设计区域面上 V 的分布为:

$$V = \sum_{e=1}^M N_1 V_{e1} + N_2 V_{e2} + N_3 V_{e3} + N_4 V_{e4} \quad (11)$$

因此,利用二阶微分泛函^[12]的一般形式,可将

$$B_z(x_i, y_i, z_i) = -\frac{\mu_0 t}{4\pi} \int \frac{\sigma(\rho) \left(\sum_{k=1}^K V_k \frac{\partial N_k}{\partial l} \right) \left[\cos \frac{l}{R} \cdot (R \cos \frac{l}{R} - x_i) + \sin \frac{l}{R} \cdot (R \sin \frac{l}{R} - y_i) \right]}{\left[(R \cos \frac{l}{R} - x_i)^2 + (R \sin \frac{l}{R} - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\Omega \quad (14)$$

式中, K 为柱面的总节点数; V_k 为节点电压值; N_k 为节点形函数。

4 优化方法

MRI 匀场线圈设计的优化目标是在设计区域寻找最优材料分布,使线圈能最大程度抵消 DSV 区域磁场不均匀分量,从而提高磁场均匀度。DSV 区域取 m 个点,将磁场误差的最小二乘形式作为目标方程,最大磁场偏差以及密度分布作为约束条件。优化模型的目标方程为:

$$F = \sum_{k=1}^m (B_{z,k} - B_{zobj,k})^2 \quad (15)$$

根据以上分析,优化模型可写为:

$$\text{Min}; F \quad (16)$$

约束条件为:

$$\frac{|B_z - B_{zobj}|}{\text{Max } B_{zobj}} \leq 1\% \quad (17)$$

$$\rho S_e \leq CS_{\text{sum}} \quad (18)$$

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \quad (19)$$

式中, ρ 、 S_e 分别为每个网格的材料密度和面积; S_{sum} 为线圈的总面积; C 为线圈在设计区域的占比; B_{zobj} 为目标磁场,根据实际匀场需求确定其表达式; ρ_{\min} 为最小材料密度,为防止在求解过程中刚度矩阵出现奇异值,故规定一个不为0的最小密度, $\rho_{\min} =$

$\nabla^2 V = 0$ 变为:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \left[\sum_{e=1}^M (V_{e1} \nabla N_1 + V_{e2} \nabla N_2 + V_{e3} \nabla N_3 + V_{e4} \nabla N_4) \right]^2 d\Omega \quad (12)$$

对 Φ 求导,取极值得到电导矩阵方程:

$$KV = 0 \quad (13)$$

式中

$$K = \sum_{e=1}^M K_{i,j}^e$$

$$K_{i,j}^e = \nabla N_i \nabla N_j = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}$$

K 为电导矩阵,由 M 个 4×4 的矩阵 $K_{i,j}^e$ 组成。设计区域柱面的磁场 B_z 的计算公式离散形式为^[10]:

$0.001^{[13]}$ 。

模型求解的难点在于变量多,计算量大,故采用优化准则法(Optimization Criteria, OC)进行求解。将目标函数和约束条件联合,建立优化准则,在该准则下,密度变量的迭代公式如下:

$$\rho^{n+1} = \rho^n \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{1}{\lambda C} \right)^\eta \quad (20)$$

式中, η 为阻尼因子,一般取0.5; λ 为拉格朗日乘数,可用二分法得到^[14]。优化准则法模型重分析次数与变量数目和优化模型规模没有直接关系,因此收敛速度快。

5 设计案例

采用材料变密度法设计MRI系统的一阶轴向匀场线圈,验证理论分析的正确性。图3为MRI系统模型,病床置入MRI系统温孔中,温孔的直径为 $\phi 400\text{mm}$,轴向长度 $H = 1000\text{mm}$,其中匀场线圈设计区域半径为 $R = 190\text{mm}$,为节省计算时间,根据对称性,只需计算设计区域一半柱面,划分为5000个网格。DSV区域为球型, $\phi_{\text{DSV}} = 100\text{mm}$,磁场强度 G 取 1mT/m ,并按经纬度划分400个目标点,如图4所示,一阶轴向匀场线圈目标磁场 $B_{zobj} = Gz_i$ 。

优化流程如图5所示。目标函数随迭代次数的变化如图6所示, n 为迭代次数, F_b 为目标函数。

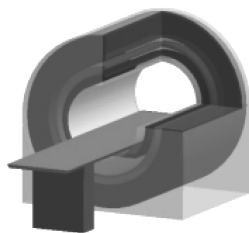


图 3 MRI 系统
Fig. 3 MRI system

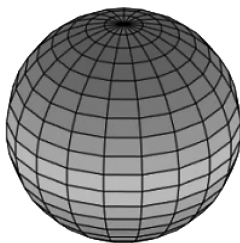


图 4 DSV 区域目标点分布
Fig. 4 DSV region target distribution

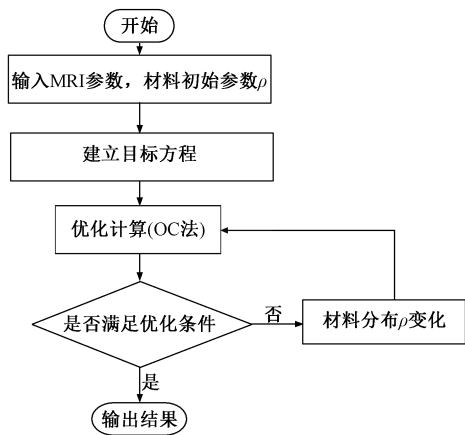


图 5 优化流程图
Fig. 5 Flow chart of optimization

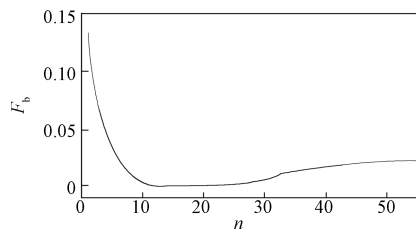


图 6 目标函数值变化
Fig. 6 Change of objective function value

上柱面优化结果如图 7 所示,其中, i 表示横向划分网格数目, j 表示纵向划分网格数目。黑色部分表示有材料分布,白色表示无材料分布。

此时线圈为一块薄铜板,必须离散为导线的形

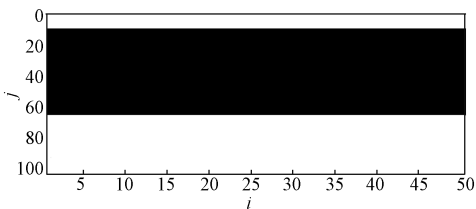
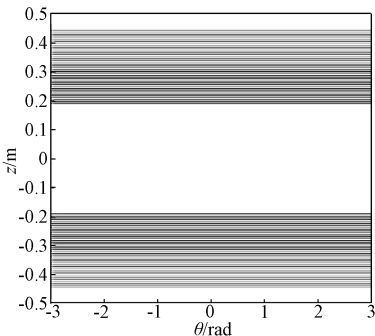
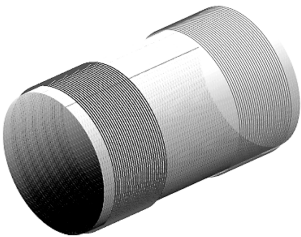


图 7 优化结果
Fig. 7 Optimization result

式,方可控制每匝电流的大小和方向。在 MRI 线圈设计中,通常采用的方法是连续电流密度法和离散导线法^[15],连续电流密度法通常与数值方法相结合,如边界元法、有限元法等。根据变密度法的特点,可利用连续电流密度法得到线圈拓扑结构。电流密度分布在设计区域柱面上,流函数 $\psi(\theta,z)$ 只有一个非零分量,因此 $J = \nabla \psi e_r$, 即 $J_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial z}, J_z = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, 一旦获得电流密度流函数,线圈绕组就可以通过离散流函数来实现。线圈的离散匝数 N_{turns} 可调,每匝电流 $I_0 = (\psi_{\text{max}} - \psi_{\text{min}})/N_{\text{turns}}$, 离散匝数 $N_{\text{turns}} = 200$ 时, $I_0 = 0.67\text{A}$,图 8 为材料离散为导线的分布情况和匀场线圈的形状。



(a) 流函数等值分布



(b) 匀场线圈形状

图 8 流函数等值分布及匀场线圈形状
Fig. 8 Contour of stream function and winding pattern of shim coil

匀场线圈参数见表 1。设计区域分为上、下柱面,关于 $z=0$ 对称分布, z_1, z_2 为匀场线圈在坐标轴上的位置。

表 1 匀场线圈的参数
Tab. 1 Parameters of shim coil

柱面	z_1 /mm	z_2 /mm	厚度 /mm	轴向 长度/mm	匝数	电流 /A
上柱面	185	450	2	265	200	0.67
下柱面	-450	-185	2	265	200	-0.67

DSV 表面磁场偏差分布以及磁场偏差等高线如图 9 所示,其中 ΔB 表示磁场偏差。DSV 表面最大磁场偏差 0.86%,满足设计要求。

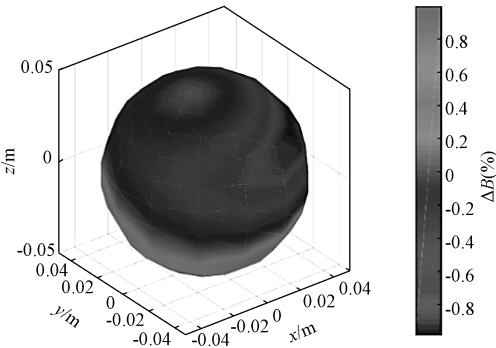


图 9 磁场偏差分布
Fig. 9 Distribution of magnetic field deviation

利用解析法设计一阶轴向室温匀场线圈^[16]时,需要在 $z=\pm h$ 平面对称放置两通电电流方向相反的线圈,如图 10 所示,以抵消球谐波函数中偶数阶的磁场分量。要使设计的线圈产生的磁场分量仅按一阶分布,需使其他奇数阶分量前的系数相加为 0。当球谐波分量展开为 4 阶时,线圈设计参数满足:

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{3}Z$$

(21)

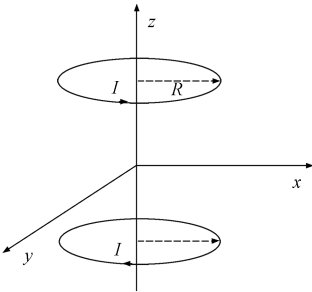


图 10 两电流方向相反的线圈
Fig. 10 Two coils with opposite current direction

在本模型中,匀场半径 $R=190\text{mm}$,对应线圈位置 $Z=165\text{mm}$ 。假设该位置为匀场线圈的中心,当绕线为单层,且长度与变密度法设计的线圈相同时,则 $z_1=32\text{mm}$, $z_2=297\text{mm}$,最大磁场偏差 8.53%;绕线为双层,则 $z_1=99\text{mm}$, $z_2=231\text{mm}$,最大磁场偏差

5.44%;绕线为 4 层时, $z_1=133\text{mm}$, $z_2=197\text{mm}$,最大磁场偏差 4.84%。可以看出,解析法获得的匀场线圈,性能远不如变密度法设计的线圈。

6 结论

材料变密度法多应用于机械、水利、桥梁、土木等领域,能有效利用材料,充分发挥材料特性,被认为是一个具有挑战性和应用前景的研究,但其在电磁学领域应用不多。采用材料变密度法设计 MRI 系统的匀场线圈是一种新颖的尝试,并且本文采用了一种改进的惩罚函数,与传统的 SIMP、RAMP 插值方法相比,具有更好的惩罚效果。利用有限元方法求解电压分布的拉普拉斯方程,从而得到电流在设计区域的分布,最后利用流函数离散线圈时,无需再重新计算电流密度,加快了计算速度,且得到的匀场线圈性能明显优于解析法设计的线圈。但材料变密度法设计模型中,电流流向只有轴向方向,没有径向方向,因此设计径向匀场线圈非常受限。对高阶轴向匀场线圈来说,其构型为多个线圈,且电流方向不同,在给定设计区域的边界条件后,得到的优化结果易为局部最优解。另外,由于设计方法不够成熟,很多因素未能考虑进去,如电磁力、功耗,发热等,这是今后需要改进和深入研究的方向。

参考文献 (References):

[1] 王秋良, 杨文晖, 倪志鹏, 等 (Wang Qiuliang, Yang Wenhui, Ni Zhipeng, et al.). 核磁共振成像技术研究进展 (Research progress of MRI technology) [J]. 高科技与产业化 (High-Technology & Industrialization), 2013, (12): 46-59.

[2] 刘建华, 程军胜, 王秋良, 等 (Liu Jianhua, Cheng Junsheng, Wang Qiuliang, et al.). 高场超导磁体研究进展及其应用 (Research progress and application of high-field superconducting magnets) [J]. 电工电能新技术 (Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy), 2017, 36 (11): 1-13.

[3] 胡洋 (Hu Yang). 改进的边界元有源匀场设计方法研究 (Improved boundary element method for active shimming design) [D]. 北京: 中国科学院大学 (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences), 2017.

[4] 赵菲 (Zhao Fei). 拓扑优化设计方法在电磁结构中的应用研究 (Application of topology optimization in electromagnetic structure) [D]. 天津: 河北工业大学 (Tianjing: Hebei University of Technology), 2011.

[5] Bendson M P. Optimal shape design as a material distri-

- bution problem [J]. *Structural Optimization*, 1989, 1 (4): 193-202.
- [6] 龙凯, 赵红伟 (Long Kai, Zhao Hongwei). 抑制灰度单元的改进优化准则法 (A modified optimality criterion method for gray elements suppression) [J]. *计算机辅助设计与图形学学报* (*Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*), 2010, 22 (12): 2197-2201.
- [7] Zhou M, Rozvany G I N. The COC algorithm - Part II: Topological geometrical and generalized shape optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89 (1-3): 309-336.
- [8] Stople M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22 (2): 116-124.
- [9] 昌俊康, 段宝岩 (Chang Junkang, Duan Baoyan). 连续体结构拓扑优化的一种改进变密度法及其应用 (An improved variable density method for topology optimization of continuum structures and its application) [J]. *计算力学学报* (*Chinese Journal of Computational Mechanics*), 2009, 26 (2): 188-192.
- [10] Pan Hui, Jia Feng, Liu Zhenyu, et al. Design of small-scale gradient coils in magnetic resonance imaging by using the topology optimization method [J]. *Chinese Physics B*, 2018, 27 (5): 050201.
- [11] Liu Zhenyu, Jia Feng, Hennig Jurgan, et al. Optimization MRI cylindrical coils using discretized stream function with high order smoothness [J]. *IEEE Transactions on Magnetism*, 2012, 48 (3): 1179-1188.
- [12] 王勖成 (Wang Xucheng). 有限单元法 (Finite element method) [M]. 北京: 清华大学出版社 (Beijing: Tsinghua University Press), 2003.
- [13] 罗震, 陈立平, 黄玉盈, 等 (Luo Zhen, Chen Liping, Huang Yuying, et al.). 连续体结构的拓扑优化设计 (Topological optimization for continuum structures) [J]. *力学进展* (*Advances in Mechanics*), 2004, 34 (4): 463-476.
- [14] Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21 (2): 120-127.
- [15] Zhang P, Wang Y, Wang W, et al. A spiral, bi-planar gradient coil design for open magnetic resonance imaging [J]. *Technology & Health Care*, 2017, 26 (7): 1-14.
- [16] 郑海清 (Zheng Haiqing). 超导磁共振波谱仪室温匀场线圈的设计 (The design of room temperature shim coils superconducting magnetic resonance spectrometer) [D]. 武汉: 中南民族大学 (Wuhan: South-Central Minzu University), 2015.

Design of MRI shim coils based on material variable density method

QU Hong-yi^{1,2}, WANG Qiu-liang^{1,2}, WANG Yao-hui^{1,2}, QIN Lang^{1,2}

(1. Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The uniformity of the magnetic field of the MRI system plays a decisive role in the quality of the imaging. It is an important remedy to use the shim coils to correct the specific field harmonic component of the field. In this paper, the first-order axial shim coil is designed by the variable density method of material distribution. Firstly, the design area is divided into a sufficient number of meshes and material density distributed in every mesh is set as a variable. To solve the current distribution and the relationship between the material distribution and the magnetic field, the conductance matrix is assembled by FEM. Secondly, the uniformity of magnetic field is taken as the optimization target, and the design variable, i. e. material distribution, is computed by the optimization criteria method, and the optimal solution that satisfies the constraint condition is obtained. Finally, the stream function is used to discretize the material distribution into wires, and the topology of the coils is obtained. Compared with the common analytical method for designing room temperature shim coil, the variable density method can effectively utilize materials and fully utilize material properties to design high performance shim coils.

Key words: MRI; shim coil; variable density method; FEM; optimization criteria method; stream function